① $f(z)=x^2+iy^2$ fonksiyonunun analitik olduğu kümeyi bulunuz.

Çözüm: · $f(z)$'nin tanım kümesi $\mathbb{C}$ dir. $D_0=\mathbb{C}^{\circ}=\mathbb{C}$ dir.

· $f(z)$'nin sürekli olduğu küme $D_1=\mathbb{C}$ dir.

· $u(x,y)=x^2$, $v(x,y)=y^2$ olup,

$u_x=2x \neq v_y=2y$, $u_y=0=v_x$ dir. $\Rightarrow u_x, u_y, v_x, v_y$ $\mathbb{C}$ de süreklidir.

· $u_x=v_y \Rightarrow 2x=2y \Rightarrow x=y$

Cauchy-Riemann denklemleri $D_3=\{x+iy : x=y,\ x,y\in\mathbb{R}\}$ kümesinde sağlanır.

· $D=D_0\cap D_1\cap D_2\cap D_3=\{x+iy : x=y,\ x,y\in\mathbb{R}\}$ türev kümesidir.

$A=\text{iç}\,D=\emptyset$ olup $f(z)$'nin analitik olduğu küme yoktur.

② $f(z)=\mathrm{Log}(1+z^2)$ fonksiyonunun analitik olduğu kümeyi gerekçeleriyle birlikte bulunuz.

Çözüm: $h(z)=1+z^2$ tam fonksiyondur.

$A=\mathbb{C}-\{x+iy : u(x,y)\le 0,\ v(x,y)=0\}$, $f(z)$'nin analitik ve tekdeğerli olduğu kümedir.

$u(x,y)=x^2-y^2+1$, $v(x,y)=2xy$,

$A=\mathbb{C}-\{x+iy : x^2-y^2+1\le 0,\ 2xy=0\}$ olur.

$2xy=0 \Rightarrow x=0$ veya $y=0$ dır.

$x=0$ için; $-y^2+1\le 0 \Rightarrow y^2\ge 1 \Rightarrow y\in\mathbb{R}-(-1,1)$ olur.

$y=0$ için $x^2+1\le 0 \Rightarrow x^2\le -1$ doğru değil, $x\in G=\emptyset$.

f nin analitik olduğu küme

$A=\mathbb{C}-\{x+iy : x=0,\ y\in\mathbb{R}-(-1,1)\}$ olarak bulunur.

Harmonik fonksiyon, harmonik eşlenik tanımlarını yapınız. z_1, z_2, u nun iki harmonik eşleniği ise $z_1 - z_2$ sabittir, gösteriniz.

3) $u(x,y) = \sin x . \cosh y$ fonksiyonu harmonik fonk. mudur? Harmonik ise harmonik eşleniğini bulunuz.

Çözüm: $u_x = \cos x \cosh y$ $\quad u_y = \sin x \sinh y$

$u_{xx} = -\sin x \cosh y$ $\quad u_{yy} = \sin x \cosh y$

$u_{xx} + u_{yy} = -\sin x \cosh y + \sin x \cosh y = 0$ olduğundan

u harmoniktir. Cauchy-Riemann denklemlerinden,

$u_x = v_y \Rightarrow \cos x \cosh y = v_y \Rightarrow v = \int \cos x \cosh y \, dy$

$v = \cos x \sinh y + \varphi(x)$

$u_y = -v_x \Rightarrow \sin x \sinh y = -(-\sin x \sinh y + \varphi'(x)) \Rightarrow \varphi'(x) = 0$

$\varphi(x) = c \Rightarrow u = \sin x \cosh y$ nin harmonik eşleniği

$v = \cos x \sinh y + c$ bulunur.

④ $\sin z = 5$ denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.

Çözüm: $\sin z = 5 \Rightarrow \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 5 \Rightarrow e^{2iz} - 10i e^{iz} - 1 = 0$

$(e^{iz})^2 - 10i(e^{iz}) - 1 = 0$

$$e^{iz} = \frac{10i \mp (-96)^{1/2}}{2} = 5i \pm 2\sqrt{6}i = (5 \pm 2\sqrt{6})i$$

$e^{iz} = (5+2\sqrt{6})i \Rightarrow iz = \log(5i + 2\sqrt{6}\, i)$ veya

$z = -\log(5i + 2\sqrt{6}\, i)$, $\arg[(5+2\sqrt{6})i] = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ dir.

$n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$

$z = -i\log[(5+2\sqrt{6})i] = -i\left[\ln(5+2\sqrt{6}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right]$

$\Rightarrow z = \dfrac{(4n+1)\pi}{2} - i\ln(5+2\sqrt{6})$ bulunur.

Benzer biçimde $e^{iz} = (5-2\sqrt{6})i \Rightarrow$

$z = -i\log[(5-2\sqrt{6})i]$, $5 - 2\sqrt{6} > 0$ old.

$\arg(5-2\sqrt{6})i = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ dir.

$z = -i\log[(5-2\sqrt{6})i] = -i\left[\ln(5-2\sqrt{6}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right]$

$z = \dfrac{(4n+1)\pi}{2} - i\ln(5-2\sqrt{6})$ dır.

(5) $\lim_{z\to 0} \frac{\sin|z|}{z}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{in}{n^2+i}$ limitlerinin olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm: $z=x$, $x\geq 0$ olsun. $x<0$ ise

$\lim_{z\to 0} \frac{\sin|z|}{z} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{z\to 0} \frac{\sin|z|}{z} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(-x)}{x} = \lim_{x\to 0} - \lim \frac{\sin(-x)}{-x} = -1$, $-1\neq 1$ old. limit yok.

$$\frac{in}{n^2+i} = \frac{in(n^2-i)}{(n^2+i)(n^2-i)} = \frac{in(n^2-i)}{n^4+1} = \frac{n}{n^4+1} + i\,\frac{n^3}{n^4+1} \to 0+i0 \quad (n\to\infty)$$

~~(6) $f(z)=\sqrt{z}$ fonksiyonunun $z_0=-1$ noktasında sürekli olmadığını gösteriniz.~~

~~Çözüm: $\sqrt{z}=$~~

(6) ~~$g(z)=\frac{(Re(z^2))^2}{z^2}$~~ $f(z)=\frac{Re(z)}{1+|z|}$ fonk.nun $z_0=0$ noktasında sürekli olduğunu tanımı kullanarak gösteriniz.

Çözüm: $\forall \varepsilon>0$ verilsin. $|z-0|<\delta \Rightarrow$

$$|f(z)-f(0)| = \left|\frac{Re\,z}{1+|z|} - 0\right| = \frac{|Re\,z|}{1+|z|} \leq |z| < \delta \Rightarrow$$

$\delta=\varepsilon$ seçilirse f, $z_0=0$ da sürekli olur.

(7) $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında analitik ise z_0 ın komşuluğundaki tüm noktalarda da analitiktir, gösteriniz.